THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Spécialité : Mathématiques

par

Ziyang Gao

Le théorème d'Ax-Lindemann mixte et ses applications à la conjecture de Zilber-Pink

Soutenue le 24 novembre 2014 devant la Commission d'examen :

M. Yves	André	CNRS et IMJ	Rapporteur
M. Bas	Edixhoven	Leiden University	Directeur
M. Bruno	Klingler	Université Paris-Diderot	Rapporteur
M. Ben	Moonen	Radboud University Nijmegen	Examinateur
M. Peter	Stevenhagen	Leiden University	Examinateur
M. Emmanuel	Ullmo	IHÉS et Université Paris-Sud	Directeur

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay CEDEX

Introduction (Français)

Le but de cette thèse est d'étudier la géométrie diophantienne des variétés de Shimura mixtes. L'un des résultats principaux est le théorème d'Ax-Lindemann. Nous en déduirons ensuite un théorème de répartition et nous utiliserons ces deux résultats pour étudier la conjecture de Zilber-Pink. Dans cette thèse deux aspects de cette conjecture seront étudiés : la conjecture d'André-Oort et la conjecture d'André-Pink-Zannier.

Toute sous-variété algébrique d'une variété algébrique est supposée fermée sauf indication contraire.

La famille universelle des variétés abéliennes

Considérons le couple $(\mathrm{GSp}_{2g}, \mathbb{H}_g^+)$, où

- GSp_{2g} est le $\mathbb{Q}$-groupe

$$\mathrm{GSp}_{2g} := \left\{ h \in \mathrm{GL}_{2g} \mid h \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} h^t = \nu(h) \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \nu(h) \in \mathbb{G}_m \right\}.$$

- $\mathbb{H}_g^+ := \{Z = X + iY \in M_g(\mathbb{C}) |\ Z = Z^t,\ Y > 0\}$.

Un fait élémentaire sur ce couple est que $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})^+$, la composante connexe de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ dans la topologie archimédienne contenant 1, agit transitivement sur $\mathbb{H}_g^+$ par

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

De plus, l'inclusion $\mathbb{H}_g^+ \subset M_g(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{g^2}$ induit une structure complexe sur $\mathbb{H}_g^+$. Dans la théorie classique, ce couple correspond à l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées.

Pour avoir un autre couple correspondant à la famille universelle, il faut élargir $(\mathrm{GSp}_{2g}, \mathbb{H}_g^+)$. Définissons maintenant un deuxième couple $(P_{2g,\mathrm{a}}, \mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^+)$[1] de la manière suivante :

- $P_{2g,\mathrm{a}}$ est le $\mathbb{Q}$-groupe $V_{2g} \rtimes \mathrm{GSp}_{2g}$, où V_{2g} est le $\mathbb{Q}$-groupe vectoriel de dimension $2g$ et GSp_{2g} agit sur V_{2g} par la représentation naturelle;
- $\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^+$ est $\mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{H}_g^+$ comme ensembles, muni de l'action de $P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{R})^+$ sur $\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^+$ définie par
$$(v, h) \cdot (v', x) := (v + hv', hx)$$
pour $(v, h) \in P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{R})^+$ et $(v', x) \in \mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^+$. On peut vérifier que cette action est aussi transitive. De plus, cette action est algébrique.

[1] La lettre « a » en indice est l'initiale du mot « abélien » pour désigner que ce couple correspond à la famille universelle des variétés. On n'utilise pas $(P_{2g}, \mathcal{X}_{2g}^+)$ parce que cette notation plus simple est utilisée pour un autre couple correspondant au $\mathbb{G}_m$-torseur ample canonique sur la famille universelle.

Il est plus délicat de définir la structure complexe sur $\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+}$: tout d'abord par la transitivité de l'action de $P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{R})^{+}$ sur $\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+}$, on a (pour un point $x_0 \in \mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+}$)

$$\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+} = P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{R})^{+} \cdot x_0.$$

Par ailleurs on rappelle que le $P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{R})^{+}$-ensemble $\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+}$ se plonge de manière équivariante dans un $P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{C})$-ensemble[2]. On a donc

$$\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+} = P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{R})^{+} \cdot x_0 \hookrightarrow P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{C}) \cdot x_0 = P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{C})/\mathrm{Stab}_{P_{2g,\mathrm{a}}(\mathbb{C})}(x_0) =: \mathcal{X}^{\vee}.$$

Alors $\mathcal{X}^{\vee}$ est par une variété complexe algébrique. L'inclusion ci-dessus réalise $\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+}$ comme un ensemble ouvert (dans la topologie archimédienne) semi-algébrique de $\mathcal{X}^{\vee}$, et ainsi induit une structure complexe sur $\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+}$.

Remarque. *Une façon plus concrète de voir cette structure complexe sur $\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+}$ est (essentiellement) la suivante (prenons le cas $g = 1$) : sur chaque point $\tau \in \mathbb{H}^{+}$, la fibre de la projection $\mathcal{X}_{2,\mathrm{a}}^{+} \to \mathbb{H}^{+}$ est*

$$(\mathcal{X}_{2,\mathrm{a}}^{+})_{\tau} = \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C} \\ (a,b) & \mapsto & a + b\tau \end{array}.$$

L'analogue de cette identification pour les dimensions supérieures est aussi correcte. Voir Remark 1.3.4.

Maintenant prenons un groupe de congruence net $\Gamma := \mathbb{Z}^{2g} \rtimes \Gamma_G < P_{2g}(\mathbb{Z})$, on a alors

$$\mathfrak{A}_g := \Gamma \backslash \mathcal{X}_{2g}^{+} \xrightarrow{[\pi]} \mathcal{A}_g := \Gamma_G \backslash \mathbb{H}_g^{+}.$$

La fibre de $[\pi]$ sur un point $[x] \in \mathcal{A}_g$ est $\mathbb{Z}^{2g} \backslash \mathbb{R}^{2g}$ munie de la structure complexe de $(\mathcal{X}_{2g,\mathrm{a}}^{+})_x$. En dimension 1 ($g = 1$ et $x = \tau \in \mathbb{H}$) elle n'est que $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $(a,b) \mapsto a + b\tau$ comme expliqué ci-dessus.

Théorème (Kuga, Brylinski, Pink)**.** $\mathfrak{A}_g \xrightarrow{[\pi]} \mathcal{A}_g$ *est la famille universelle des variétés abéliennes principalement polarisées (munie d'une structure de niveau Γ_G) sur l'espace de modules fin $\mathcal{A}_g$. De plus $\mathfrak{A}_g$ et $\mathcal{A}_g$ sont des variétés algébriques complexes.*

Les variétés de Shimura connexes mixtes arbitraires

La famille universelle $\mathfrak{A}_g$ est un exemple de variété de Shimura connexe mixte. D'autres exemples incluent:

1. Le $\mathbb{G}_m$-torseur ample canonique sur $\mathfrak{A}_g$;

[2] Pour ceux qui connaissent bien la théorie de Hodge, ce nouvel ensemble est l'ensemble des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes de type $\{(-1,0),(0,-1),(-1,-1)\}$ sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $2g+1$. Nous n'en parlerons pas beaucoup dans l'introduction. Voir le début de §1.3.1 pour plus de détails.

2. La biextension de Poincaré sur $\mathcal{A}_g$.

Les définitions des données de Shimura connexes mixtes et des variétés de Shimura connexes mixtes seront précisées dans §1.1.2.1. Il suffit ici de savoir qu'une donnée de Shimura connexe mixte est un couple $(P, \mathcal{X}^+)$ qui partage des propriétés élémentaires de $(P_{2g,\mathrm{a}}, \mathcal{X}^+_{2g,\mathrm{a}})$, par exemple P est un $\mathbb{Q}$-groupe et $P(\mathbb{R})^+U(\mathbb{C})$[3] agit transitivement sur $\mathcal{X}^+$ et cette action est algébrique. Une variété de Shimura connexe mixte S associée à $(P, \mathcal{X}^+)$ est le quotient $\Gamma\backslash\mathcal{X}^+$ de $\mathcal{X}^+$ par un sous-groupe de congruence Γ de $P(\mathbb{Q})$. D'après un théorème de Pink, S admet une structure canonique de variété algébrique. Ce théorème généralise un résultat de Baily-Borel pour les variétés de Shimura pures.

Historique du théorème d'Ax-Lindemann

Dans cette section, nous rappelons brièvement l'historique du théorème d'Ax-Lindemann et on voit comment il est une généralisation naturelle de l'analogue fonctionnel du théorème classique de Lindemann-Weierstrass. Commençons par le théorème classique de Lindemann-Weierstrass.

Théorème (Lindemann-Weierstrass)**.** *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$. S'ils sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors $\exp(\alpha_1), ..., \exp(\alpha_n)$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

L'analogue fonctionnelle de ce théorème est la suivante :

Théorème (Analogue fonctionnel, démontré par Ax [5, 6])**.** *Soient $\mathcal{Z}$ une variété algébrique irréductible sur $\mathbb{C}$ et $f_1, ..., f_n \in \mathbb{C}[\mathcal{Z}]$ des fonctions régulières sur $\mathcal{Z}$. Si les fonctions $f_1, ..., f_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendantes à constantes près, c'est-à-dire qu'il n'existe pas $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ (ne pas tous nuls) tels que $a_1 f_1 + ... + a_n f_n \in \mathbb{C}$, alors les fonctions*

$$\exp(f_1), ..., \exp(f_n) \colon \mathcal{Z} \to \mathbb{C}$$

sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

Cet analogue fonctionnel peut s'écrire de la façon géométrique de la manière suivante (reformulée par Pila-Zannier). C'est cette forme-là que l'on généralisera aux variétés de Shimura connexes mixtes arbitraires.

Théorème (Ax-Lindemann pour les tores algébriques sur $\mathbb{C}$)**.** *Soient* $\mathrm{unif} = (\exp, \cdots, \exp) \colon \mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ *et $\mathcal{Z}$ une sous-variété algébrique irréductible de $\mathbb{C}^n$. Alors* $\overline{\mathrm{unif}(\mathcal{Z})}^{\mathrm{Zar}}$ *est le translaté d'un sous-tore de* $(\mathbb{C}^*)^n$*.*

D'après l'énoncé de ce théorème d'Ax-Lindemann, nous sommes dans la **situation bi-algébrique** suivante : $\mathbb{C}^n$ et $(\mathbb{C}^*)^n$ sont des variétés algébriques,

[3]Ici U est un sous-groupe distingué de P. C'est un groupe vectoriel qui est uniquement déterminé par P (voir Definition 1.1.12). Pour $\mathfrak{A}_g$ il est trivial.

pourtant le morphisme unif : $\mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ est transcendant. Donc à priori, il n'existe aucune relation entre les deux structures algébriques de $\mathbb{C}^n$ et de $(\mathbb{C}^*)^n$. Néanmoins nous avons trouvé par Ax-Lindemann une collection des sous-variétés, les $\overline{\mathrm{unif}(\mathcal{Z})}^{\mathrm{Zar}}$ avec $\mathcal{Z}$ algébrique dans $\mathbb{C}^n$, qui sont toutes bi-algébriques. Ici on dit qu'un sous-ensemble V de $\mathbb{C}^n$ est **bi-algébrique pour** $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\mathrm{unif}} (\mathbb{C}^*)^n$ si V est fermé, algébrique, irréductible et son image sous unif est aussi algébrique. On dit qu'un sous-ensemble V' de $(\mathbb{C}^*)^n$ est **bi-algébrique pour** $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\mathrm{unif}} (\mathbb{C}^*)^n$ s'il est l'image d'un sous-ensemble bi-algébrique de $\mathbb{C}^n$.

Il existe un résultat similaire pour les variétés abéliennes complexes :

Théorème (Ax-Lindemann pour les variétés abéliennes complexes)**.** *Soient A une variété abélienne complexe,* unif : $\mathbb{C}^n \to A$ *et $\mathcal{Z}$ une sous-variété algébrique irréductible de $\mathbb{C}^n$. Alors* $\overline{\mathrm{unif}(\mathcal{Z})}^{\mathrm{Zar}}$ *est le translaté d'une sous-variété abélienne de A.*

Nous sommes alors dans une **situation bi-algébrique** similaire : $\mathbb{C}^n$ et A sont des variétés algébriques, pourtant le morphisme unif : $\mathbb{C}^n \to A$ est transcendant. Donc à priori, il n'existe aucune relation entre les deux structures algébriques de $\mathbb{C}^n$ et de A. Néanmoins, nous avons trouvé par Ax-Lindemann une collection des sous-variétés, les $\overline{\mathrm{unif}(\mathcal{Z})}^{\mathrm{Zar}}$ avec $\mathcal{Z}$ algébrique dans $\mathbb{C}^n$, qui sont toutes bi-algébriques. Ici on dit qu'un sous-ensemble V de $\mathbb{C}^n$ est **bi-algébrique pour** $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\mathrm{unif}} A$ si V est fermé, algébrique, irréductible et son image sous unif est aussi algébrique. On dit qu'un sous-ensemble V' de A est **bi-algébrique pour** $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\mathrm{unif}} A$ s'il est l'image d'un sous-ensemble bi-algébrique de $\mathbb{C}^n$.

Ax-Lindemann pour les tores algébriques sur $\mathbb{C}$ et Ax-Lindemann pour les variétés abéliennes ont été démontrés par Ax [5, 6]. Les démonstrations par la théorie o-minimale ont été trouvées par Pila-Zannier [51] et Peterzil-Starchenko [46]. Appelons ces deux cas **Ax-Lindemann plat**. Après ces travaux, des cas variés d'**Ax-Lindemann hyperbolique** (c'est-à-dire Ax-Lindemann pour les variétés de Shimura connexes pures)[4] ont été étudiés et démontrés par Pila [48] (pour $\mathcal{A}_1^N$), Ullmo-Yafaev [67] (pour les variétés de Shimura pures compactes) et Pila-Tsimerman [50] (pour $\mathcal{A}_g$). Le résultat de Pila, étant une découverte capitale pour ce théorème, a conduit à une démonstration inconditionnelle de la conjecture d'André-Oort pour $\mathcal{A}_1^N$, qui est la deuxième preuve inconditionnelle des cas spécifiques de cette conjecture après le travail d'André pour $\mathcal{A}_1^2$ [2]. La version complète d'Ax-Lindemann hyperbolique a été démontré récemment par Klingler-Ullmo-Yafaev [29]. Le théorème d'Ax-Lindemann hyperbolique est aussi un énoncé bi-algébrique dans une situation bi-algébrique similaire à celle d'Ax-Lindemann plat.

[4] Au lieu de donner l'énoncé précis d'Ax-Lindemann hyperbolique ici, nous allons plutôt expliquer en détailles Ax-Lindemann mixte dans la prochaine section et signaler à quel cas Ax-Lindemann hyperbolique correspond.

Ayant tous ces résultats, on peut se poser les questions suivantes :

Question. • *Est-ce qu'il existe un résultat contenant Ax-Lindemann plat et Ax-Lindemann hyperbolique ?*

• *De plus, est-ce qu'il existe une version en famille ?*

Les réponses à ces deux questions sont positives. Un des résultats principaux de cette thèse est la démonstration du théorème d'Ax-Lindemann mixte qui est le résultat désiré.

Avant de passer à la prochaine section, faisons la remarque suivante :

Remarque. *Dans les deux cas d'Ax-Lindemann plat, les conclusions ne changent pas si Z est seulement supposée* ***semi-algébrique et complexe analytique irréductible****. Ceci est une conséquence d'un résultat de Pila-Tsimerman [49, Lemma 4.1].*

L'énoncé du théorème d'Ax-Lindemann mixte

Dans cette partie, S est toujours une variété de Shimura connexe mixte associée à la donnée de Shimura connexe mixte $(P, \mathcal{X}^+)$ et $\mathrm{unif}\colon \mathcal{X}^+ \to S$ est son uniformisation. Tout d'abord, rappelons qu'Ax-Lindemann est un théorème de bi-algébricité. Donc nous expliquerons au début la situation bi-algébrique pour ce cas. La variété S a une structure algébrique naturelle, l'espace d'uniformisation $\mathcal{X}^+$ n'est pourtant que très rarement une variété algébrique. Cependant on a :

Proposition. *Pour toute donnée de Shimura connexe mixte $(P, \mathcal{X}^+)$, il existe une variété complexe algébrique $\mathcal{X}^\vee$ définie en termes de $(P, \mathcal{X}^+)$ et une inclusion $\mathcal{X}^+ \hookrightarrow \mathcal{X}^\vee$ qui réalise $\mathcal{X}^+$ comme un ensemble ouvert (dans la topologie archimédienne) semi-algébrique de $\mathcal{X}^\vee$.*

D'après la remarque de la dernière section, il suffit de considérer la « situation bi-algébrique » suivante : considérons les sous-ensembles semi-algébriques et complexes analytiques irréductibles de $\mathcal{X}^+$ et la structure algébrique naturelle de S. Rappelons que $\mathrm{unif}\colon \mathcal{X}^+ \to S$ est transcendant. Comme auparavant, on souhaite trouver les objets « bi-algébriques ».

Question. *Quels sont les objets bi-algébriques (c'est-à-dire les sous-ensembles semi-algébriques et complexes analytiques irréductibles de $\mathcal{X}^+$ dont l'image dans S est algébrique) ?*

Pour répondre à cette question, nous utilisons la notion de sous-variété faiblement spéciale introduite par Pink (voir Definition 1.2.2).

Définition. 1. *Un sous-ensemble $\widetilde{F} \subset \mathcal{X}^+$ est dit* ***faiblement spécial*** *s'il existe une sous-donnée de Shimura connexe mixte $(Q, \mathcal{Y}^+)$ de $(P, \mathcal{X}^+)$, un sous-groupe distingué N de Q et un point $\widetilde{y} \in \mathcal{Y}^+$ tels que*

$$\widetilde{F} = N(\mathbb{R})^+ U_N(\mathbb{C}) \widetilde{y},$$

où $U_N := N \cap U$ (rappelons que U est un sous-groupe distingué de P qui est un groupe vectoriel déterminé par P). Si $(P, \mathcal{X}^+) = (P_{2g,\mathrm{a}}, \mathcal{X}^+_{2g,\mathrm{a}})$ (c'est le cas considéré dans l'introduction), alors U est trivial.

2. *Une sous-variété F de S est dite* ***faiblement spéciale*** *si $F = \mathrm{unif}(\widetilde{F})$ pour un $\widetilde{F} \subset \mathcal{X}^+$ faiblement spécial.*

Pour les variétés de Shimura pures, Moonen a démontré que les sous-variétés faiblement spéciales d'une variété de Shimura pure sont précisément ses sous-variétés totalement géodésiques [39, 4.3]. Donnons ici un exemple pour les variétés de Shimura mixtes.

Exemple 1 (Voir Proposition 1.2.14). *Soit $\mathfrak{A} \to B$ une famille des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g sur une courbe algébrique complexe B. Soit $\mathcal{C}$ sa partie isotriviale, c'est-à-dire le plus grand sous-schéma abélien isotrivial de $\mathfrak{A} \to B$. Alors quitte à prendre des revêtements finis de B, on peut supposer que $\mathcal{C}$ est une famille constante et qu'il existe un diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathfrak{A}_g \arrow[d, "{[\pi]}"'] \\ B \arrow[r, "i_B"] & \mathcal{A}_g \end{tikzcd}$$

où i_B est soit constant soit quasi-fini, auquel cas i est aussi quasi-fini. Alors

$$\{i^{-1}(E) |\ E \text{ faiblement spécial dans } \mathfrak{A}_g\} = \{\text{translatés des sous-schémas abéliens de } \mathfrak{A} \to B \text{ par une section de torsion et puis par une section constante de } \mathcal{C} \to B\}.$$

Nous démontrons dans cette thèse (voir Remark 1.3.7, le cas pur par Ullmo-Yafaev [65]):

Théorème. *Un sous-ensemble $F \subset S$ est faiblement spécial si et seulement si $\widetilde{F}$ (une composante complexe analytique irréductible de $\mathrm{unif}^{-1}(F)$) est semi-algébrique dans $\mathcal{X}^+$ et F est algébrique irréductible dans S.*

Nous sommes désormais prêts à donner l'énoncé du théorème d'Ax-Lindemann mixte dont la démonstration sera faite dans le Chapitre 3 de cette thèse (de §3.1 à §3.4).

Théorème (Ax-Lindemann mixte). *Soit $\widetilde{\mathcal{Z}}$ un sous-ensemble semi-algébrique et complexe analytique irréductible de $\mathcal{X}^+$. Alors $\overline{\mathrm{unif}(\widetilde{\mathcal{Z}})}^{\mathrm{Zar}}$ est faiblement spéciale.*

Ax-Lindemann hyperbolique est précisément le même énoncé lorsque la variété de Shimura mixte ambiante S est pure. Le théorème d'Ax-Lindemann mixte implique Ax-Lindemann plat et Ax-Lindemann hyperbolique [29]. De plus il est vraiment une version en famille. Pour le démontrer, nous utilisons un résultat de comptage pour Ax-Lindemann hyperbolique [29, Theorem 1.3].

Une esquisse de la démonstration d'Ax-Lindemann mixte sera donnée dans la prochaine section. Avant de passer à la démonstration, donnons ici un autre théorème assez proche d'Ax. Rappelons que nous avons une variété algébrique $\mathcal{X}^\vee$ telle que $\mathcal{X}^+ \hookrightarrow \mathcal{X}^\vee$.

Théorème (Ax de type log[5])**.** *Soient Y une sous-variété algébrique irréductible de S et $\widetilde{Y}$ une composante complexe analytique irréductible de* $\mathrm{unif}^{-1}(Y)$*. Définissons*

$$\overline{\widetilde{Y}}^{\mathrm{Zar}} := \textit{la composante complexe analytique irréductible de l'intersection de } \mathcal{X}^+ \textit{ avec l'adhérence de Zariski de } \widetilde{Y} \textit{ dans } \mathcal{X}^\vee \textit{ qui contient } \widetilde{Y}.$$

Alors $\overline{\widetilde{Y}}^{\mathrm{Zar}}$ est faiblement spéciale.

Ceci est aussi un résultat de cette thèse et sa version plus détaillée est le Theorem 2.3.1, où l'existence de $\overline{\widetilde{Y}}^{\mathrm{Zar}}$ (qui n'est pas claire à priori) est aussi démontrée. Si S est une variété de Shimura pure, ce théorème peut se déduire d'un résultat de Moonen [39, 3.6, 3.7]. Dans un article d'Ullmo-Yafaev à venir, sa version pure dans le cadre de la bi-algébricité sera expliquée avec plus de détails.

L'esquisse de la démonstration d'Ax-Lindemann mixte

Dans cette section nous donnons une esquisse de la démonstration du théorème d'Ax-Lindemann mixte. Pour simplifier, nous considérons seulement la famille universelle $\mathfrak{A}_g$, c'est-à-dire $(P, \mathcal{X}^+) = (P_{2g,\mathrm{a}}, \mathcal{X}^+_{2g,\mathrm{a}})$, $S = \mathfrak{A}_g$, $(G, \mathcal{X}^+_G) = (\mathrm{GSp}_{2g}, \mathbb{H}^+_g)$ et $S_G = \mathcal{A}_g$ avec Γ net. Supposons maintenant que $\widetilde{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{X}^+_{2g,\mathrm{a}}$ est un sous-ensemble semi-algébrique et complexe analytique irréductible. Le diagramme suivant sera utile :

$$\begin{tikzcd} (P, \mathcal{X}^+) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{unif}"'] & (G, \mathcal{X}^+_G) \arrow[d, "\mathrm{unif}_G"] \\ S = \Gamma \backslash \mathcal{X}^+ \arrow[r, "{[\pi]}"] & S_G = \Gamma_G \backslash \mathcal{X}^+_G \end{tikzcd}$$

La démonstration sera divisée en 6 étapes.

$\boxed{\textbf{\textit{Étape 1}}}$ Définissons $Y := \overline{\mathrm{unif}(\widetilde{\mathcal{Z}})}^{\mathrm{Zar}}$. Soit $\widetilde{Z}$ un sous-ensemble maximal parmi tous les sous-ensembles semi-algébriques et complexes analytiques irréductibles de $\mathcal{X}^+$, qui à la fois contiennent $\widetilde{\mathcal{Z}}$ et à la fois sont contenus dans $\mathrm{unif}^{-1}(Y)$. L'existence d'un tel $\widetilde{Z}$ découle d'un argument de dimension. Alors $\widetilde{Z}$ est algébrique irréductible au sens de Definition 1.3.5, c'est-à-dire que $\widetilde{Z}$

[5] Le fait que cet énoncé est assez proche d'Ax m'a été signalé par Bertrand, ainsi que le nom « Ax de type log ».

est une composante complexe analytique irréductible de l'intersection de son adhérence de Zariski dans $\mathcal{X}^\vee$ et $\mathcal{X}^+$. Remplaçons S par la plus petite sous-variété de Shimura connexe mixte de S contenant Y et remplaçons $(P, \mathcal{X}^+)$, Γ, $(G, \mathcal{X}_G^+)$ et Γ_G respectivement. Remarquons que pour des raisons évidentes ces remplacements ne changent ni l'hypothèse ni la conclusion d'Ax-Lindemann. Il suffit alors de démontrer que $\widetilde{Z}$ est faiblement spéciale par la bi-algébricité des sous-variétés faiblement spéciales.

Notons N le groupe de monodromie algébrique connexe de Y^{sm}, c'est-à-dire

$$N = (\overline{\mathrm{Im}\big(\pi_1(Y^{\mathrm{sm}}) \to \pi_1(S) = \Gamma\big)}^{\mathrm{Zar}})^\circ.$$

Alors par les résultats d'André [1, Theorem 1] et de Wildeshaus [71, Theorem 2.2], $N \lhd P$. Voir la démonstration du Théorème 2.3.1(1).

$\boxed{\textit{Étape 2}}$ Définissons le $\mathbb{Q}$-stabilisateur de $\widetilde{Z}$

$$H_{\widetilde{Z}} := (\overline{\mathrm{Stab}_{P(\mathbb{R})}(\widetilde{Z}) \cap \Gamma}^{\mathrm{Zar}})^\circ.$$

Alors *Ax de type log* implique $H_{\widetilde{Z}} \lhd N$. Voir Lemma 3.2.3.

$\boxed{\textit{Étape 3}}$ Trouvons un ensemble fondamental $\mathcal{F}$ pour l'action de Γ sur $\mathcal{X}^+$ tel que unif $|_{\mathcal{F}}$ est définissable dans la théorie o-minimale $\mathbb{R}_{an,\exp}$.

Pour la théorie o-minimale nous nous référons à [67, Section 3] (pour une version concise) et [48, Section 2, Section 3] (pour une version détaillée). Expliquons ici brièvement pourquoi et comment la théorie o-minimale est utile pour la démonstration. D'après l'énoncé d'Ax-Lindemann, c'est un théorème géométrique. Donc on souhaite chercher une démonstration géométrique. Pourtant il ne suffit pas d'utiliser uniquement la géométrie algébrique parce que le morphisme unif est transcendant. Pour résoudre ce problème, une façon possible est de « raffiner la topologie de Zariski » : à part des ($\mathbb{R}$-)polynômes, on permet à d'autres fonctions de définir les ensembles constructibles. La théorie o-minimale $\mathbb{R}_{an,\exp}$ est par définition la collection de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^m$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) qui sont définis par des équations et des inégalités des $\mathbb{R}$-polynômes, de la fonction $\mathbb{R}$-exponentielle et des fonctions réellement analytiques restreintes. Les sous-ensembles ci-dessus sont appelés **ensembles définissables dans** $\mathbb{R}_{an,\exp}$, et les applications dont les graphes sont définissables sont appelées **applications définissables dans** $\mathbb{R}_{an,\exp}$. Bien que $\mathbb{R}_{an,\exp}$ ne soit pas une topologie, les ensembles définissables jouent un rôle de même nature que les ensembles constructibles dans la topologie de Zariski. La théorie o-minimale $\mathbb{R}_{an,\exp}$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{R}_{an,\exp}$ est une algèbre de Boole;
2. (Théorème de Chevalley) pour tout ensemble définissable A et toute application définissable $f\colon A \to B$, l'image $f(A)$ est aussi définissable;
3. (Décomposition connexe finie) tout ensemble définissable A peut s'écrire comme une union finie des ensembles définissables connexes.

4. (Décomposition cellulaire, voir [69, 2.11]) La décomposition connexe finie peut être renforcée : pour tout ensemble définissable A dans $\mathbb{R}^m$, il existe une décomposition cellulaire $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^m$ telle que A est une union finie d'éléments de $\mathcal{D}$.

Si on peut trouver un ensemble fondamental $\mathcal{F}$ pour l'action de Γ sur $\mathcal{X}^+$ tel que unif $|_{\mathcal{F}}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{an,\exp}$, alors on peut utiliser les outils de la théorie o-minimale pour étudier unif : $\mathcal{X}^+ \to S$. Finalement on souhaite récupérer des informations algébriques puisque, comme expliqué avant, la conclusion d'Ax-Lindemann est de trouver une collection des objets bi-algébriques. Les théorèmes de comptage de Pila-Wilkie serviront à cette fin. L'utilisation de la théorie o-minimale pour la démonstration sera expliquée dans l'*Étape 4*.

L'existence d'un tel $\mathcal{F}$ a été démontrée par Peterzil-Starchenko pour $\mathfrak{A}_g$ [47, Theorem 1.3] (dans leur preuve chaque fonction thêta est écrite en terme de $\mathbb{R}$-polynômes, de $\mathbb{R}$-exp et des fonctions réellement analytiques restreintes) et Klingler-Ullmo-Yafaev pour toutes les variétés de Shimura connexes pures [29, Theorem 1.2] (la preuve exploite les outils développés pour les compactifications toroïdales des variétés de Shimura pures [4]). Il est bon de remarquer que l'ensemble fondamental $\mathcal{F}$ construit par Peterzil-Starchenko est le plus naturel possible (voir Remark 1.3.4). En combinant ces deux théorèmes et quelques résultats supplémentaires, l'existence d'un tel $\mathcal{F}$ pour toutes les variétés de Shimura mixtes sera démontrée dans cette thèse §3.3.1.

Remarque. *Dans les trois premières étapes, la démonstration d'Ax-Lindemann mixte et celle d'Ax-Lindemann hyperbolique [29] ne sont pas essentiellement différentes : il suffit d'utiliser et de démontrer les résultats respectifs pour chaque cas. Mais à partir de l'Étape 4, les deux démonstrations diffèrent beaucoup.*

$\boxed{\textit{Étape 4}}$ Pour le cas hyperbolique (c'est-à-dire pur), on souhaite démontrer $\dim(H_{\widetilde{Z}}) > 0$ dans cette étape. Ceci est fait par Klingler-Ullmo-Yafaev [29] en calculant les volumes des courbes algébriques dans l'espace d'uniformisation près de la frontière. Notons que c'est presque la dernière étape pour la démonstration du cas pur parce que l'on en déduira $\widetilde{Z} = H_{\widetilde{Z}}(\mathbb{R})\widetilde{z}$ (pour un point $\widetilde{z} \in \widetilde{Z}$) par une récurrence assez simple.

Pour le cas mixte, il ne suffit pas de démontrer uniquement $\dim(H_{\widetilde{Z}}) > 0$. Voici un cas qui est évidement impossible d'après Ax-Lindemann mixte et que la condition $\dim(H_{\widetilde{Z}}) > 0$ toute seule ne suffit pas à exclure : $\dim \pi(\widetilde{Z}) > 0$ mais $H_{\widetilde{Z}} < V_{2g}$. Dans ce cas, il est clair que $\widetilde{Z}$ ne peut pas être une orbite sous $H_{\widetilde{Z}}(\mathbb{R})^+$, pourtant il est possible que $\dim(H_{\widetilde{Z}})$ soit strictement positive.

Pour résoudre ce problème, nous démontrons dans cette étape (Proposition 3.2.6)

$$\pi(H_{\widetilde{Z}}) = (\overline{\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})}\left(\pi(\widetilde{Z})\right) \cap \Gamma_G}^{\mathrm{Zar}})^{\circ}.$$

Il est évident que $\pi(H_{\widetilde{Z}})$ est contenu dans le membre droit de l'équation. Donc cette égalité révèle que $\pi(H_{\widetilde{Z}})$ est le plus grand possible.

C'est au cours de la démonstration de cette égalité que l'on doit utiliser la théorie o-minimale et le théorème de comptage de Pila-Wilkie. De plus, comparé à l'estimation de Klingler-Ullmo-Yafaev, on doit exploiter toutes les conclusions de la version en famille de Pila-Wilkie. Voir §3.3.2 pour la démonstration complète. Ici dans l'introduction, nous expliquons brièvement comment démontrer

$$\dim \pi(H_{\widetilde{Z}}) > 0$$

si $\dim \pi(\widetilde{Z}) > 0$.

Rappelons que $Y = \overline{\mathrm{unif}(\widetilde{Z})}^{\mathrm{Zar}}$. Définissons

$$\Sigma(\widetilde{Z}) := \{p \in P(\mathbb{R}) |\ \dim(p\widetilde{Z} \cap \mathrm{unif}^{-1}(Y) \cap \mathcal{F}) = \dim \widetilde{Z}\} \subset P(\mathbb{R}),$$

alors par le prolongement analytique,

$$\Sigma(\widetilde{Z}) = \{p \in P(\mathbb{R}) |\ p\widetilde{Z} \subset \mathrm{unif}^{-1}(Y),\ p\widetilde{Z} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

Les faits suivants sur $\Sigma(\widetilde{Z})$ ne sont pas difficiles à démontrer :

1. $\Sigma(\widetilde{Z})$ et $\pi(\Sigma(\widetilde{Z}))$ sont tous les deux définissable dans $\mathbb{R}_{an,\exp}$ (par la première écriture de $\Sigma(\widetilde{Z})$ parce que $\mathrm{unif}\,|_{\mathcal{F}}$ est définissable et la fonction dim l'est aussi);

2. $\Sigma(\widetilde{Z}) \cdot \widetilde{Z} \subset \mathrm{unif}^{-1}(Y)$ (par la deuxième écriture de $\Sigma(\widetilde{Z})$);

3. $\pi\big(\Sigma(\widetilde{Z}) \cap \Gamma\big) = \pi\big(\Sigma(\widetilde{Z})\big) \cap \Gamma_G$ (voir Lemma 3.3.2[6]).

Pour démontrer $\dim \pi(H_{\widetilde{Z}}) > 0$, il suffit de prouver $|\pi(H_{\widetilde{Z}})(\mathbb{R}) \cap \Gamma_G)| = \infty$. Et donc il suffit de trouver deux nombres réels $c' > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $T \gg 0$,

$$|\{\gamma_G \in \pi(H_{\widetilde{Z}})(\mathbb{R}) \cap \Gamma_G |\ H(\gamma_G) \leqslant T\}| \geqslant c'T^{\delta}.$$

Donc il suffit de démontrer qu'il existe deux nombres réels $c' > 0$ et $\delta > 0$ et, pour chaque T assez grand, un bloc[7] $B(T) \subset \Sigma(\widetilde{Z})$ tel que

$$|\{\gamma_G \in \pi(B(T)) \cap \Gamma_G |\ H(\gamma_G) \leqslant T\}| \geqslant c'T^{\delta}.$$

Voir la fin de §3.3 pour plus de détails.

Maintenant nous utilisons un résultat de comptage dû à Klingler-Ullmo-Yafaev [29, Theorem 1.3] qui dit : il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $T \gg 0$,

$$|\{\gamma_G \in \pi(\Sigma(\widetilde{Z})) \cap \Gamma_G |\ H(\gamma_G) \leqslant T\}| \geqslant T^{\varepsilon}.$$

[6] Ici il faut modifier un peu l'ensemble fondamental $\mathcal{F}$ choisi auparavant, mais ceci est faisable par quelques opérations simples. Voir la fin de §3.3.1.

[7] Un bloc est un ensemble définissable connexe tel que sa dimension coïncide avec la dimension de son adhérence dans la topologie de $\mathbb{R}$-Zariski.

Mais d'après le théorème de Pila-Wilkie [48, cas $\mu = 0$ de 3.6] (ou tout simplement [29, Theorem 6.1]), il existe un nombre réel $c = c(\varepsilon) > 0$ tel que l'ensemble

$$\{\gamma_G \in \pi(\Sigma(\widetilde{Z})) \cap \Gamma_G | \ H(\gamma_G) \leqslant T\}$$

est contenu dans une union d'au plus $cT^{\varepsilon/2}$ blocs. Ceci implique qu'il existe deux nombres réels $c' > 0$, $\delta > 0$ tels que pour tout T assez grand, il existe un bloc $B_G(T) \subset \pi(\Sigma(\widetilde{Z}))$ avec

$$|\{\gamma_G \in B_G(T) \cap \Gamma_G | \ H(\gamma_G) \leqslant T\}| \geqslant c'T^{\delta}.$$

Remarquons que cette inégalité est exactement ce que nous souhaitons pour conclure cette étape de la démonstration d'Ax-Lindemann hyperbolique (c'est-à-dire pur). Mais pour démontrer Ax-Lindemann mixte, nous sommes obligés d'utiliser le fait que ces blocs $B_G(T)$ (pour tout T assez grand) viennent d'un nombre fini de familles de blocs ! Plus concrètement, au delà du fait que l'ensemble $\{\gamma_G \in \pi(\Sigma(\widetilde{Z})) \cap \Gamma_G | \ H(\gamma_G) \leqslant T\}$ est contenu dans une union d'au plus $cT^{\varepsilon/2}$ blocs, [48, cas $\mu = 0$ de 3.6] nous assure qu'il existe un entier $J > 0$ et J familles de blocs $B^j \subset \Sigma(\widetilde{Z}) \times \mathbb{R}^l$ ($j = 1, ...J$) tels que chacun de ces (au plus) $cT^{\varepsilon/2}$ blocs, en particulier les $B_G(T)$ pour tout T assez grand, est B^j_y pour certains j et $y \in \mathbb{R}^l$.

Pour chaque T assez grand, regardons $\pi^{-1}(B_G(T)) \cap \Sigma(\widetilde{Z})$. Parce que $B_G(T) = B^j_y$ pour certains j et $y \in \mathbb{R}^l$, $\pi^{-1}(B_G(T)) \cap \Sigma(\widetilde{Z})$ est la fibre de $(\pi \times 1_{\mathbb{R}^l})^{-1}(B^j) \cap (\Sigma(\widetilde{Z}) \times \mathbb{R}^l)$ sur $y \in \mathbb{R}^l$. L'ensemble $(\pi \times 1_{\mathbb{R}^l})^{-1}(B^j) \cap (\Sigma(\widetilde{Z}) \times \mathbb{R}^l)$ étant une famille définissable sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^l$, la décomposition cellulaire de $\mathbb{R}_{an,\exp}$ implique qu'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que chaque fibre de $(\pi \times 1_{\mathbb{R}^l})^{-1}(B^j) \cap (\Sigma(\widetilde{Z}) \times \mathbb{R}^l)$, en particulier chaque $\pi^{-1}(B_G(T)) \cap \Sigma(\widetilde{Z})$ pour T assez grand, a au plus n_0 composantes connexes (voir [69, 3.6]). Par conséquent, $\pi^{-1}(B_G(T)) \cap \Sigma(\widetilde{Z})$ a au plus n_0 composantes connexes. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
&\pi\big(\pi^{-1}(B_G(T)) \cap \Sigma(\widetilde{Z}) \cap \Gamma\big) \\
&= B_G(T) \cap \pi\big(\Sigma(\widetilde{Z}) \cap \Gamma\big) \\
&= B_G(T) \cap \pi\big(\Sigma(\widetilde{Z})\big) \cap \Gamma_G && \text{par le 3ème fait sur } \widetilde{Z} \text{ cité précédemment} \\
&= B_G(T) \cap \Gamma_G && \text{puisque } B_G(T) \subset \pi\big(\Sigma(\widetilde{Z})\big).
\end{aligned}$$

Donc il existe une composante connexe $B(T)$ de $\pi^{-1}(B_G(T)) \cap \Sigma(\widetilde{Z})$ telle que

$$|\{\gamma_G \in \pi(B(T)) \cap \Gamma_G | \ H(\gamma_G) \leqslant T\}| \geqslant \frac{c'}{n_0} T^{\delta}.$$

Mais par définition n_0 ne dépend pas de T. Donc cet ensemble $B(T)$ est ce que nous cherchons.

Remarque. *Par la démonstration, l'indépendance de n_0 vis-à-vis de T est cruciale. Mais le $B_G(T)$ que l'on obtient de Pila-Wilkie dépend de la hauteur* *choisie T et par conséquent, n_0 aussi dépend de T à priori. C'est pour surmonter cette difficulté que nous sommes obligés d'utiliser le fait que tous les $B_G(T)$ viennent d'un nombre fini de familles de blocs pour le cas mixte.*

Étape 5 Démontrons que $\widetilde{Z} = H_{\widetilde{Z}}(\mathbb{R})^+\widetilde{z}$ pour un $\widetilde{z} \in \widetilde{Z}$.

Pour le cas hyperbolique (c'est-à-dire pur), ceci découle d'un argument de récurrence plutôt simple.

Pour le cas mixte, il faut étudier plus soigneusement la géométrie. Il faut utiliser le théorème d'Ax-Lindemann pour la fibre (qui est une variété abélienne pour $\mathfrak{A}_g \to \mathcal{A}_g$) et faire des calculs supplémentaires. Ceci sera fait dans Theorem 3.2.8(1). Remarquons que la structure complexe des fibres de $\mathcal{X}^+_{2g,\mathrm{a}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{H}^+_g$ est utilisée à cette étape.

Remarque. *Pour une variété de Shimura mixte connexe arbitraire S associée à la donnée de Shimura mixte connexe $(P, \mathcal{X}^+)$, la fibre de $S \to S_G$, où S_G est la partie pure de S, n'a pas nécessairement une structure de groupe compatible à la loi de groupe de P (voir Lemma 2.1.1). En particulier le théorème d'Ax-Lindemann pour la fibre n'était pas connu jusqu'à présent en général. Sa démonstration, qui sera donnée dans §3.4, est aussi technique : nous devons répéter les arguments de l'Étape 4 à l'Étape 6 (Step I à Step IV dans §3.4), avec une « Étape 6 » assez différente (qui est Step IV dans §3.4).*

Étape 6 Démontrons $H_{\widetilde{Z}} \lhd P$.

Pour le cas hyperbolique (c'est-à-dire pur), ceci est une conséquence de la structure des groupes réductifs. Les faits que $H_{\widetilde{Z}} \lhd N \lhd P$ et que P est réductif impliquent directement $H_{\widetilde{Z}} \lhd P$.

Pour le cas mixte, cet argument n'est plus valable. En général, il est faux qu'un sous-groupe distingué d'un sous-groupe distingué soit encore un sous-groupe distingué du groupe de départ. Donc à part des arguments de la théorie de groupes (les résultats de §1.1.4 seront utilisés), il faut aussi étudier soigneusement la géométrie. Voir Theorem 3.2.8(2).

Ici expliquons seulement pourquoi $V_{H_{\widetilde{Z}}} := \mathcal{R}_u(H_{\widetilde{Z}}) = H_{\widetilde{Z}} \cap V_{2g}$ est distingué dans P. Pour cela, nous utilisons la structure complexe des fibres de $\pi\colon \mathcal{X}^+_{2g,\mathrm{a}} \to \mathbb{H}^+_g$: soit $\widetilde{z} \in \widetilde{Z}$ un point tel que $\pi(\widetilde{z})$ est Hodge-generique dans $\mathcal{X}^+_G$. Un tel $\widetilde{z}$ existe puisque l'on a supposé que S est la plus petite variété de Shimura connexe mixte qui contient $Y = \overline{\mathrm{unif}(\widetilde{Z})}^{\mathrm{Zar}}$. Donc le groupe de Mumford-Tate $\mathrm{MT}(\pi(\widetilde{z}))$ est égal à G. Mais $\widetilde{Z} = H_{\widetilde{Z}}(\mathbb{R})^+\widetilde{z}$ par l'*Étape 5*, donc la fibre de $\widetilde{Z}$ sur $\pi(\widetilde{z})$ est

$$\widetilde{Z}_{\pi(\widetilde{z})} = V_{H_{\widetilde{Z}}}(\mathbb{R})\widetilde{z}.$$

Comme $\widetilde{Z}$ est par définition un sous-ensemble complexe analytique de $\mathcal{X}^+$ (et donc de $\mathcal{X}^+_{2g,\mathrm{a}}$), $V_{H_{\widetilde{Z}}}(\mathbb{R})$ est un sous-espace complexe de $(\mathcal{X}^+_{2g,\mathrm{a}})_{\pi(\widetilde{z})} = V_{2g}(\mathbb{R})$. Mais la structure complexe de $(\mathcal{X}^+_{2g,\mathrm{a}})_{\pi(\widetilde{z})}$ est donnée par la structure de Hodge de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$ sur V_{2g} dont le groupe de Mumford-Tate est $\mathrm{MT}(\pi(\widetilde{z})) = G$. Donc $V_{H_{\widetilde{Z}}}$ est un G-module. Donc $V_{H_{\widetilde{Z}}} \lhd P$ puisque $\mathcal{R}_u(P)$ est commutatif.

$\boxed{\textbf{\textit{Conclusion}}}$ Maintenant par les 6 étapes ci-dessus (surtout les conclusions de l'*Étape 5* et de l'*Étape 6*), $\mathrm{unif}(\widetilde{Z})$ est une sous-variété faiblement spéciale de $\mathfrak{A}_g$. Comme $Y = \overline{\mathrm{unif}(\widetilde{Z})}^{\mathrm{Zar}}$ par définition et $\mathrm{unif}(\widetilde{Z})$, étant faiblement spéciale, est une sous-variété algébrique de $\mathfrak{A}_g$, $Y = \mathrm{unif}(\widetilde{Z})$. Mais $Y = \overline{\mathrm{unif}(\widetilde{\mathcal{Z}})}^{\mathrm{Zar}}$ par définition, donc $\overline{\mathrm{unif}(\widetilde{\mathcal{Z}})}^{\mathrm{Zar}}$ est faiblement spéciale.

D'Ax-Lindemann à André-Oort

Une des motivations principales pour étudier le théorème d'Ax-Lindemann est ses applications à la conjecture de Zilber-Pink. La conjecture d'André-Oort est le cas le plus connu de cette conjecture.

Conjecture (André-Oort). *Soient S une variété de Shimura connexe mixte et Σ l'ensemble de ses points spéciaux. Soit Y une sous-variété irréductible de S. Si $\overline{Y \cap \Sigma}^{\mathrm{Zar}} = Y$, alors Y est une sous-variété de Shimura connexe mixte de S (ou, de manière équivalente, Y est faiblement spéciale[8]).*

Exemple. *Les points spéciaux de $\mathfrak{A}_g$ sont précisément les points correspondants aux points de torsion sur les variétés abéliennes CM. Donc la conjecture d'André-Oort recouvre partiellement la conjecture de Manin-Mumford.*

Cette conjecture a été démontrée, sous l'hypothèse de Riemann généralisée, pour toutes les variétés de Shimura pures par Klingler-Ullmo-Yafaev [66, 30]. Inspirés par la récente démonstration inconditionnelle d'André-Oort pour le cas $\mathcal{A}_1^N$ (faite par Pila [48]), des progrès ont été faits pour obtenir des preuves ne reposant pas sur GRH. Le cadre de la démonstration de Pila est la stratégie proposée par Pila-Zannier :

1. Démontrer le théorème d'Ax-Lindemann;

2. Déduire d'Ax-Lindemann la répartition[9] des sous-variétés (faiblement) spéciales de dimension strictement positive contenues dans une sous-variété;

3. Définir un paramètre (que l'on appelle la complexité) pour les points dans Σ et choisir un « bon » ensemble fondamental pour l'action de Γ sur $\mathcal{X}^+$ tel que $\mathrm{unif}|_{\mathcal{F}}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{an,\exp}$;

4. Démontrer une borne supérieure pour la hauteur d'un point arbitraire dans $\mathrm{unif}^{-1}(\Sigma) \cap \mathcal{F}$ par rapport à la complexité de son image dans Σ;

[8] L'équivalence des deux conclusions découle de [54, Proposition 4.2, Proposition 4.15].

[9] Au sens du Théorème 4.1.3.

5. Démontrer une borne inférieure pour la taille des orbites sous Galois des points dans Σ par rapport à leurs complexités;

6. Conclure par le théorème d'Ax-Lindemann, le théorème de répartition dans (2), la borne supérieure dans (4) et la borne inférieure dans (5). Cette étape est une conséquence directe des étapes précédentes.

Le théorème d'Ax-Lindemann est démontré dans cette thèse sous la forme la plus générale. Le théorème de répartition dans (2) sera aussi démontré (Theorem 4.1.3). Remarquons que ce théorème pour les variétés de Shimura pures a été obtenu par Ullmo [64, Théorème 4.1] et aussi séparément par Pila-Tsimerman [50, Section 7] sans « faiblement ». Le choix de l'ensemble fondamental $\mathcal{F}$ et la définissabilité de unif $|_{\mathcal{F}}$ dans (3) sont faits dans §3.3.1 et la complexité des points dans Σ est définie au cours de la démonstration du Théorème 4.3.1. La borne supérieure dans (4) a été démontrée par Pila-Tsimerman [49, Theorem 3.1] pour $\mathcal{A}_g$ et leur résultat peut être facilement généralisé aux variétés de Shimura mixtes de type abélien. Pour la borne inférieure dans (5), on ramènera le cas des variétés de Shimura mixtes au cas des variétés de Shimura pures dans §4.2. Le meilleur résultat pour les variétés de Shimura pures est donné par Tsimerman [62, Theorem 1.1] qui l'a démontré inconditionnellement pour tous les points spéciaux de $\mathcal{A}_6^N$ et sous GRH pour tous les points spéciaux de $\mathcal{A}_g$[10]. En combinant tous ces résultats, on a (Theorem 4.3.1)

Théorème. *La conjecture d'André-Oort est valable inconditionellement pour toute variété de Shimura mixte S dont la partie pure est une sous-variété de $\mathcal{A}_6^N$ (par exemple $\mathfrak{A}_6^N$). Elle est valable sous GRH pour toutes les variétés de Shimura mixtes de type abélien.*

Pour démontrer la conjecture d'André-Oort pour les variétés de Shimura mixtes qui ne sont pas de type abélien, il nous manque une bonne définition de la complexité pour les points dans Σ qui nous permet d'avoir la borne supérieure dans (4). Remarquons que par les arguments du Théorème 4.3.1, il suffit de l'avoir pour toutes les variétés de Shimura pures. Daw-Orr sont en train d'étudier ce problème.

D'André-Oort à André-Pink-Zannier

L'obstacle qui nous empêche de démontrer la conjecture d'André-Oort pour $\mathfrak{A}_g$ ($g \geqslant 7$) est la borne inférieure pour la taille des orbites sous Galois des points spéciaux. On peut considérer une version plus faible d'André-Oort : remplaçons Σ par l'ensemble des points de torsion sur les variétés abéliennes

[10] La borne inférieure est conjecturée par Edixhoven [19]. L'étude de cette borne est initiée aussi par Edixhoven qui l'a démontré inconditionnellement pour les surfaces de Hilbert [18]. Des résultats similaires à celui de Tsimerman pour les points spéciaux de $\mathcal{A}_3^N$ ont été obtenus inconditionnellement par Ullmo-Yafaev séparément et ils ont aussi démontré la borne inférieure pour toutes les variétés de Shimura pures sous GRH [68].

CM **qui sont isogènes à une variété abélienne CM fixée**. Dans ce cas, l'obstacle ci-dessus a été surmonté par une série de travaux de Habegger-Pila [24, Section 6] et d'Orr [43]. Le point clé pour ce faire est un théorème de Masser-Wüstholz [35] et sa version effective donnée par Gaudron-Rémond [21].

Ce cas particulier d'André-Oort est contenu dans une autre conjecture que l'on appelle la conjecture d'André-Pink-Zannier.

Conjecture (André-Pink-Zannier)**.** *Soient S une variété de Shimura connexe mixte, s un point de S et Y une sous-variété irréductible de S. Soit Σ l'orbite de Hecke généralisée de s. Si $\overline{Y \cap \Sigma}^{\mathrm{Zar}} = Y$, alors Y est faiblement spéciale.*

Plusieurs cas de cette conjecture avaient déjà été étudiés par André avant que sa forme finale ait été donnée par Pink [54, Conjecture 1.6]. Elle est aussi liée à un problème proposé par Zannier. Voir §5.1.1 pour plus de détails. Pink a aussi démontré [54, Theorem 5.4] que cette conjecture implique la conjecture de Mordell-Lang.

La conjecture d'André-Pink-Zannier a été intensement étudiée par Orr [43, 42]. Dans cette thèse on considérera seulement la famille universelle $\mathfrak{A}_g$ pour la conjecture d'André-Pink-Zannier. Dans ce cas on peut calculer l'orbite de Hecke généralisée de s de manière explicite. On a (5.1.1)

$$\begin{aligned}\Sigma &= \text{points de division de l'orbite sous les isogénies polarisées de } s\\ &= \{t \in \mathfrak{A}_g |\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ et une isogénie polarisée}\\ &\qquad f\colon (\mathfrak{A}_{g,\pi(s)}, \lambda_{\pi(s)}) \to (\mathfrak{A}_{g,\pi(t)}, \lambda_{\pi(t)}) \text{ tels que } nt = f(s)\}.\end{aligned}$$

Finalement nous démontrons (Theorem 4.3.2, Theorem 5.1.4 et Theorem 5.1.5)

Théorème. *La conjecture d'André-Pink-Zannier est valable pour $\mathfrak{A}_g$ et Y dans chacune des trois situations suivantes :*

1. *s est un point de torsion de $\mathfrak{A}_{g,\pi(s)}$ et $\mathfrak{A}_{g,\pi(s)}$ est une variété abélienne CM (ce qui est un cas spécifique de la version faible de la conjecture d'André-Oort mentionnée auparavant);*

2. *s est un point de torsion de $\mathfrak{A}_{g,\pi(s)}$ et $\dim \pi(Y) \leqslant 1$;*

3. *$s \in \mathfrak{A}_g(\overline{\mathbb{Q}})$ et $\dim(Y) = 1$.*

La première partie de ce théorème est une généralisation des anciens résultats de Edixhoven-Yafaev [72, 20] (pour les courbes dans les variétés de Shimura pures) et Klingler-Ullmo-Yafaev [66, 30] (pour les variétés de Shimura pures) et sa version p-adique a été démontrée par Scanlon [58].

Nous consacrerons la dernière section de cette thèse §5.5 à expliquer que le même énoncé d'André-Pink-Zannier en remplaçant s par un sous-groupe finiment engendré d'une fibre de $\mathfrak{A}_g \to \mathcal{A}_g$ (qui est une variété abélienne) et en remplaçant l'orbite sous les isogénies polarisées par l'orbite sous les isogénies (pas nécessairement polarisées) se déduit en fait de la conjecture d'André-Pink-Zannier.

Zilber-Pink

Finalement abordons la conjecture de Zilber-Pink [54, 73, 57].

Conjecture (Zilber-Pink)**.** *Soit S une variété de Shimura connexe mixte. Soit Y une sous-variété Hodge-générique de S. Alors*

$$\bigcup_{\substack{S' \text{ spéciale,} \\ \mathrm{codim}(S') > \dim(Y)}} S' \cap Y$$

n'est pas Zariski dense dans Y.

Cette conjecture est une généralisation commune de la conjecture d'André-Oort et la conjecture d'André-Pink-Zannier (voir [52, Theorem 3.3]). Habegger-Pila ont démontré récemment plusieurs résultats pour la conjecture de Zilber-Pink pour $\mathcal{A}_1^N$ [23] (dans le même article ils ont aussi démontré la conjecture de Zilber-Pink pour toutes les courbes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dans les variétés abéliennes), notamment un résultat inconditionel pour une grande classe de courbes [24]. Nous ne parlerons pas du cas des groupes algébriques (voir l'éxposé Bourbaki de Chambert-Loir [14] pour un résumé avant les travaux de Habegger-Pila).

Pour les variétés de Shimura mixtes, il n'y a pas beaucoup de résultats pour cette conjecture. Á part des résultats de cette thèse, Bertrand, Bertrand-Edixhoven, Bertrand-Pillay et Bertrand-Masser-Pillay-Zannier ont étudié récemment les biextentions de Poincaré [7, 11, 8, 9, 10]. Ils ont obtenu plusieurs résultats dont certains fournissent des exemples reliés à cette thèse.

Structure de la thèse

Le Chapitre 1 introduit les préliminaires de cette thèse. La section §1.1 fait un résumé de la théorie des variétés de Shimura mixtes, se concentrant sur les aspects traités dans la thèse. En particulier, la section §1.1.1 fait un résumé de la théorie des structures de Hodge mixtes qui conduit naturellement à la définition des variétés de Shimura mixtes dans §1.1.2. D'autres propriétés élémentaires seront aussi données dans §1.1.2. La section §1.1.3 introduit les variétés de Shimura mixtes de type Siegel (en particulier la famille universelle des variétés abéliennes) et se termine en un « reduction lemma ». Toutes ces sous-sections sont des faits connus et la référence principale est [53, Chapitre 1-Chapitre 3]. Dans §1.1.4 nous démontrons une proposition de la théorie des groupes algébriques qui sera utilisée dans la thèse par la suite. La section §1.2 fait un résumé des propriétés élémentaires des sous-variétés faiblement spéciales et donne la description géométrique des sous-variétés faiblement spéciales des variétés de Shimura mixtes de type Kuga. La section §1.3 concerne la situation bi-algébrique pour les variétés de Shimura mixtes.

Le Chapitre 2 démontre le théorème d'Ax de type log. La section §2.1 concerne des résultats sur la partie unipotente, c'est-à-dire la fibre de la projection d'une variété de Shimura connexe mixte vers sa partie pure. La section

§2.2 comporte plusieurs résultats connus pour les groupes de monodromie des variations admissibles des structures de Hodge. Après ces préliminaires, le théorème d'Ax de type log sera démontré dans §2.3.

Le Chapitre 3 démontre le théorème d'Ax-Lindemann mixte. La section §3.1 donne quatre énoncés équivalents pour ce théorème. La section §3.2 esquisse la démonstration et prouve en détails l'*Étape 1*, l'*Étape 2*, l'*Étape 5* et l'*Étape 6*. La section §3.3 traite l'estimation en utilisant la théorie o-minimale. Ceci correspond à l'*Étape 3* et à l'*Étape 4*. La section §3.4 traite la partie unipotente et répond à une question restante pour l'*Étape 5*. Dans l'appendice de ce chapitre nous discutons de deux aspects: §3.5.1 présente plus de détails sur un fait simple que nous admettons à propos de la définissabilité dans §3.3.1 et §3.5.2 esquisse une démonstration simplifiée du théorème d'Ax-Lindemann plat.

Le Chapitre 4 concerne plusieurs aspects pour passer d'Ax-Lindemann à André-Oort. La section §4.1 démontre le théorème de répartition comme une conséquence du théorème d'Ax-Lindemann mixte. La section §4.2 ramène la borne inférieure pour les orbites sous Galois des points spéciaux des variétés de Shimura mixtes à la borne inférieure pour les variétés de Shimura pures. En combinant ces deux résultats, Ax-Lindemann et la borne supérieure étudiée par Pila-Tsimerman, nous démontrons le résultat principal pour la conjecture d'André-Oort dans §4.3. La démonstration de la version faible d'André-Oort sera aussi donnée dans §4.3. L'appendice de ce chapitre résume les estimées des orbites sous Galois des points spéciaux des variétés de Shimura pures obtenue par Ullmo-Yafaev [66, Section 2].

Le Chapitre 5 concerne la conjecture d'André-Pink-Zannier. La section §5.1 donne le contexte et énonce les résultats principaux. La section §5.2 calcule les orbites de Hecke généralisées dans $\mathfrak{A}_g$. La section §5.3 démontre le cas de torsion et §5.4 démontre le cas de non-torsion. Chaque démonstration contient la définition des complexités des point dans l'orbite de Hecke généralisée, la borne supérieure pour les hauteurs et la borne inférieure pour les orbites sous Galois. Les estimations pour les deux cas sont légèrement différentes. La section §5.5 discute des variantes de la conjecture d'André-Pink-Zannier.